Merge-Sort con "coprocessore speciale"

Moreno Marzolla

19 marzo 2022

In questo documento mostriamo come risolvere il problema seguente: supponiamo che esista un "coprocessore speciale" in grado di realizzare l'operazione Merge di Merge-Sort in tempo $\Theta(\sqrt{n})$ anziché $\Theta(n)$ come la procedura Merge vista a lezione e implementata in laboratorio. Determinare il costo asintotico di Merge-Sort se si usa tale coprocessore.

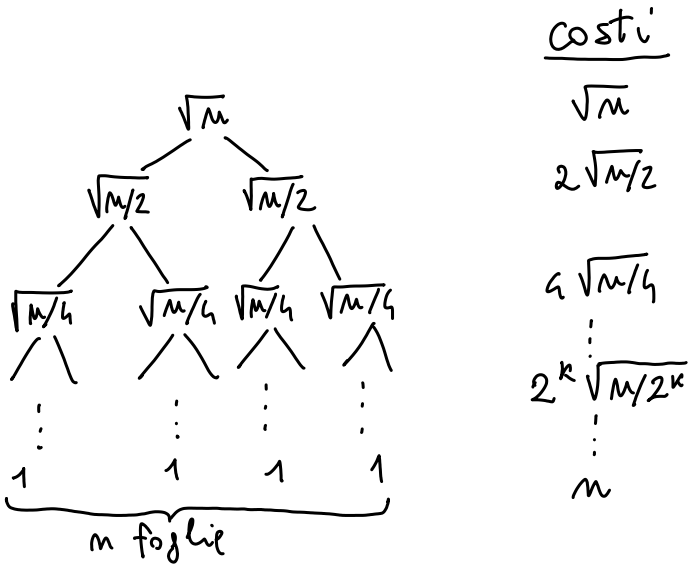
Detto $T(n)$ il numero di operazioni elementari svolte da Merge-Sort per ordinare un array di lunghezza n, possiamo definire $T(n)$ in modo ricorsivo come segue:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + c_2\sqrt{n} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

L'applicazione del Master Theorem consentirebbe di derivare immediatamente la soluzione. Supponiamo però di non conoscere (o di non volere usare) il Master Theorem, e procediamo con una dimostrazione diretta.

Disegniamo l'albero della ricorsione, segnando in ciascun nodo il costo dell'operazione Merge effettuata in quel nodo. Il costo dell'intero algoritmo (cioè il valore di $T(n)$) sarà dato dalla somma dei costi scritti nei singoli nodi.

L'albero della ricorsione è un albero binario completo, perché ad ogni passo si effettuano due chiamate ricorsive che operano su due sottovettori la cui dimensione è metà di quella corrente. Si ottiene quindi l'albero:



Nella colonna di destra ("costi") indichiamo la somma dei costi di tutti i nodi in quel livello. Per semplicità omettiamo le costanti c_1, c_2 perché non influiscono sull'ordine di grandezza del risultato. Osservando che l'albero binario ha circa $\log_2 n$ livelli, si ha che $T(n)$ può essere espresso come

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log_2 n} 2^k \sqrt{\frac{n}{2^k}}$$

Dato che il fattore $\sqrt{n}$ nella sommatoria non dipende dall'indice k, lo possiamo trattare come se fosse una costante e portare fuori, ottenendo:

$$T(n) = \sqrt{n} \sum_{k=0}^{\log_2 n} \frac{2^k}{\sqrt{2^k}}$$

Ricordando alcune proprietà degli esponenziali:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$$
$$\sqrt{2^k} = 2^{k/2}$$

possiamo concludere che $\frac{2^k}{\sqrt{2^k}} = 2^{k/2} = (\sqrt{2})^k$. La sommatoria può essere riscritta come

$$T(n) = \sqrt{n} \sum_{k=0}^{\log_2 n} (\sqrt{2})^k$$

che assume la forma di una serie geometrica di ragione $\sqrt{2}$, la quale ammette una forma chiusa che nel caso generale si esprime come:

$$\sum_{k=0}^{x} a^k = \frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}$$

Nel nostro caso si ha $a = \sqrt{2}$, $x = \log_2 n$ per cui

$$T(n) = \sqrt{n}\ \frac{(\sqrt{2})^{\log_2 n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

Osservando la frazione, si ha che il denominatore è una costante e il numeratore può essere riscritto come $(\sqrt{2})^{\log_2 n+1} - 1 = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{\log_2 n} - 1$. Dato che siamo interessati all'ordine di grandezza di $T(n)$, possiamo trascurare le costanti additive e moltiplicative, ottenendo che l'ordine di grandezza della frazione è dominato da $(\sqrt{2})^{\log_2 n}$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} T(n) &\propto \sqrt{n} \times (\sqrt{2})^{\log_2 n} \\ &= \sqrt{n} \times \sqrt{2^{\log_2 n}} \\ &= \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n \end{aligned}$$

($\propto$ si legge "è proporzionale a"). Possiamo quindi concludere che

$$T(n) = \Theta(n)$$

che è il risultato che avremmo ottenuto applicando il Master Theorem. $\square$