Tecniche di analisi degli algoritmi

Moreno Marzolla
marzolla@cs.unibo.it

Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Università di Bologna

19 ottobre 2010

Modello di calcolo

Consideriamo un modello di calcolo costituito da una macchina a registri così composta:

- Esiste un dispositivo di input e un dispositivo di output;
- La macchina ha N locazioni di memoria, con indirizzo da 1 a N; ciascuna locazione può contenere un valore (intero, reale...);
- l'accesso in lettura o scrittura ad una qualsiasi locazione richiede tempo costante;
- La macchina dispone di un set di registri per mantenere i parametri necessari alle operazioni elementari e per il puntatore all'istruzione corrente;
- La macchina ha un programma composto da un insieme finito di istruzioni

Costo computazionale

Definizione

Indichiamo con $f(n)$ la quantità di risorse (tempo di esecuzione, oppure occupazione di memoria) richiesta da un algoritmo su input di dimensione n, operante su una macchina a registri.

Siamo interessati a studiare l'*ordine di grandezza* di $f(n)$ ignorando le costanti moltiplicative e termini di ordine inferiore.

Misura del costo computazionale

Utilizzare il tempo effettivo di esecuzione di un programma come costo computazionale presenta numerosi svantaggi:

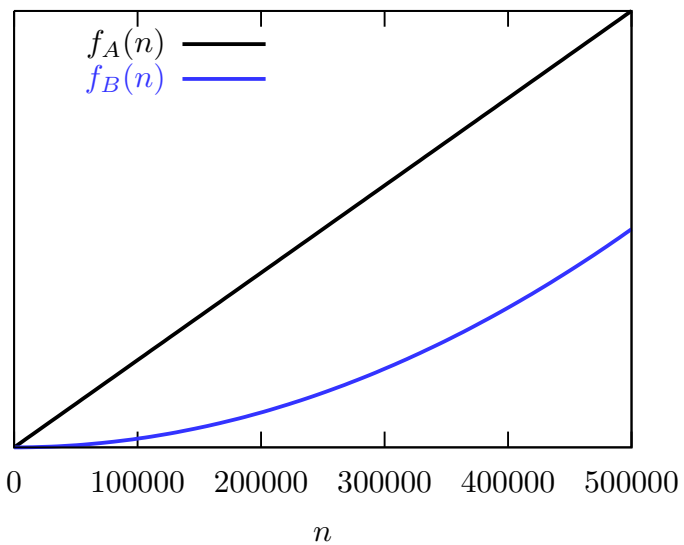
- Implementare un dato algoritmo può essere laborioso;
- Il tempo è legato alla specifica implementazione (linguaggio di programmazione usato, caratteristiche della macchina usata per effettuare le misure, ...);
- Potremmo essere interessati a stimare il costo computazionale usando input troppo grandi per le caratteristiche della macchina su cui effettuiamo le misure;
- Determinare l'ordine di grandezza a partire da misure empiriche non è sempre possibile;

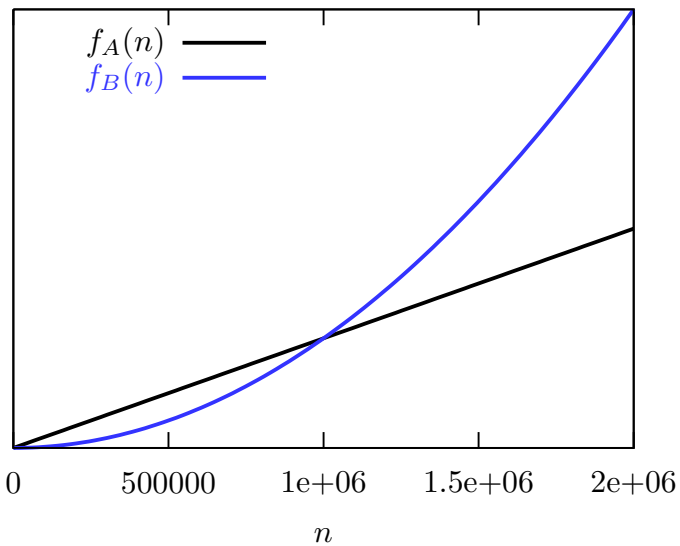
Costo computazionale
Esempio

Consideriamo due algoritmi A e B che risolvono lo stesso problema.

- Sia $f_A(n) = 10^3 n$ il costo computazionale di A;
- Sia $f_B(n) = 10^{-3} n^2$ il costo computazionale di B.

Quale dei due è preferibile?





La notazione asintotica $O(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $O(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ g(n) \leq cf(n)$$

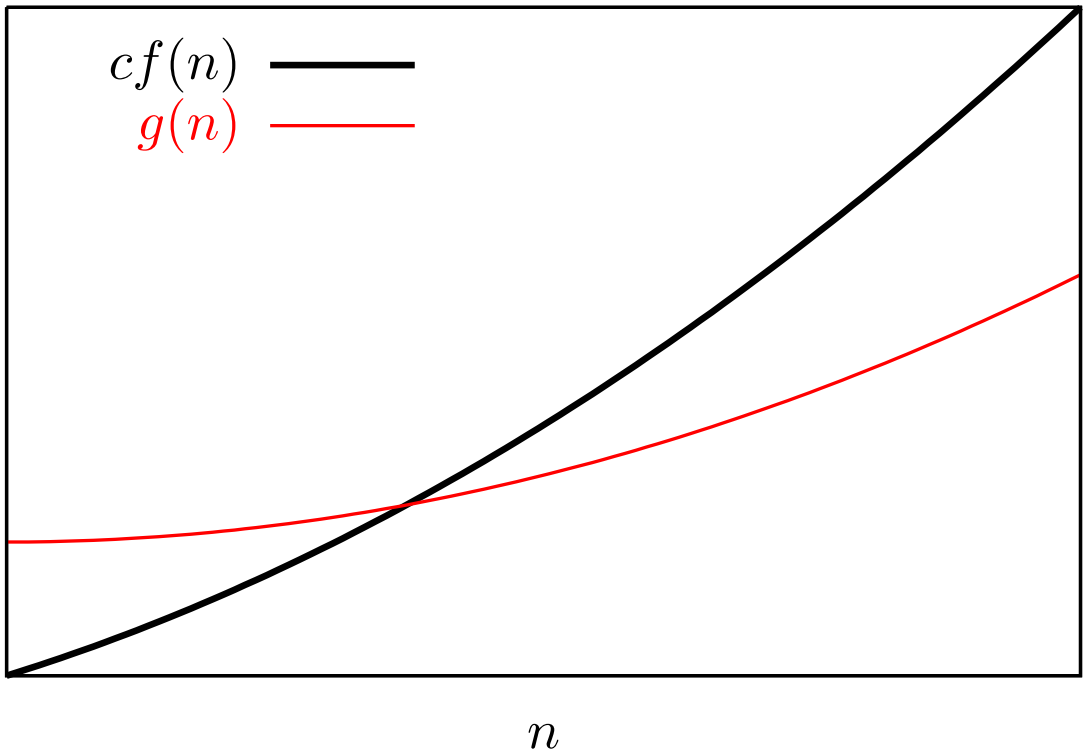
In maniera piú sintetica:

$$O(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione (sebbene non formalmente corretta) $g(n) = O(f(n))$ per indicare $g(n) \in O(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = O(f(n))$$



Esempio

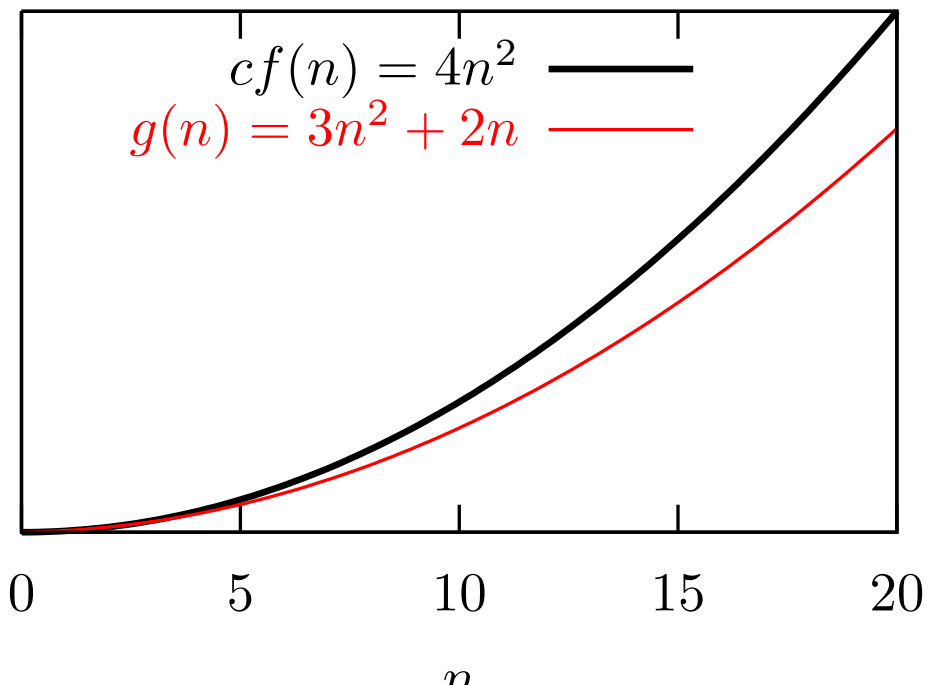
Sia $g(n) = 3n^2 + 2n$ e $f(n) = n^2$. Dimostriamo che $g(n) = O(f(n))$.

Dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tali che $g(n) \leq cf(n)$ per ogni $n \geq n_0$, ossia:

$$3n^2 + 2n \leq cn^2 \tag{1}$$

$$c \geq \frac{3n^2 + 2n}{n^2} = 3 + \frac{2}{n}$$

se ad esempio scegliamo $n_0 = 10$ e $c = 4$, si ha che la relazione (1) è verificata.



La notazione asintotica $\Omega(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $\Omega(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ g(n) \geq cf(n)$$

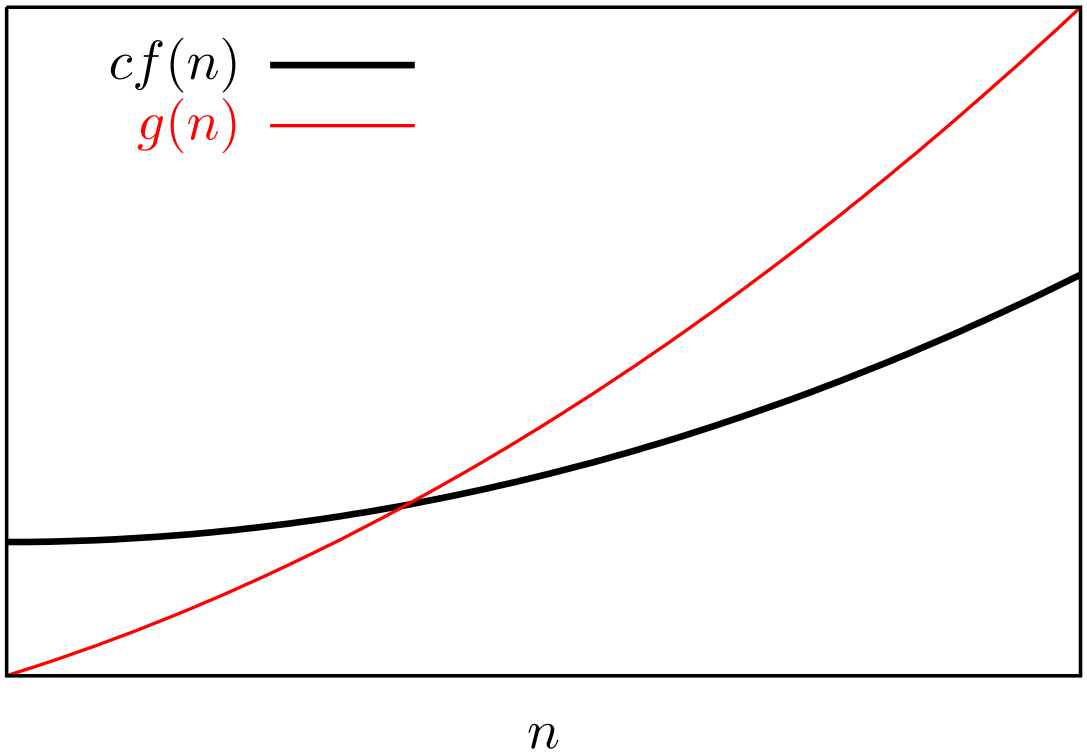
In maniera piú sintetica:

$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \geq cf(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione $g(n) = \Omega(f(n))$ per indicare $g(n) \in \Omega(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = \Omega(f(n))$$



Esempio

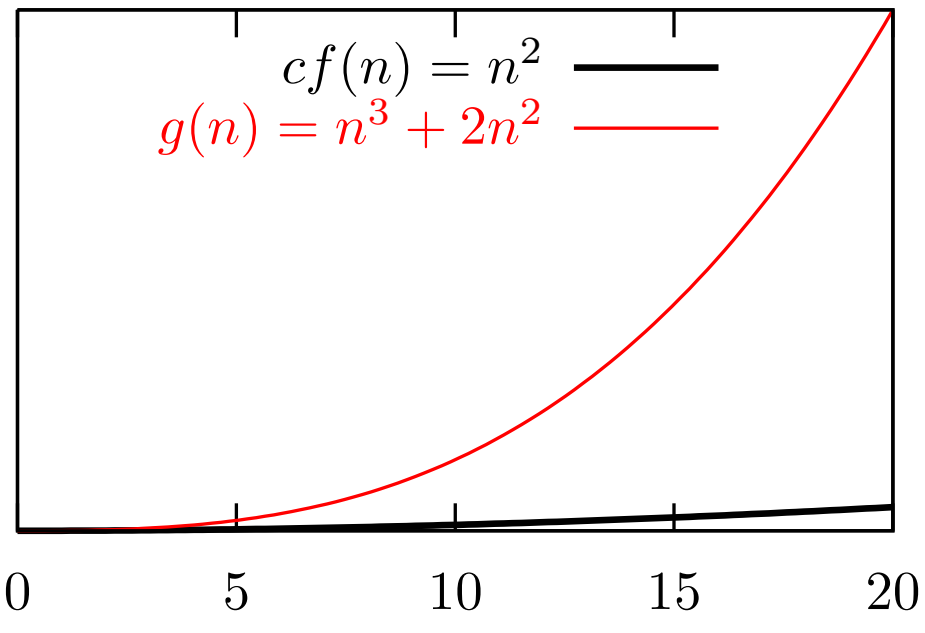
Sia $g(n) = n^3 + 2n^2$ e $f(n) = n^2$, e dimostriamo che $g(n) = \Omega(f(n))$.

Dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ sia $g(n) \geq cf(n)$, ossia:

$$n^3 + 2n^2 \geq cn^2 \tag{2}$$

$$c \leq \frac{n^3 + 2n^2}{n^2} = n + 2$$

se ad esempio scegliamo $n_0 = 0$ e $c = 1$, si ha che la relazione (2) è verificata.



La notazione asintotica $\Theta(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $\Theta(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$$

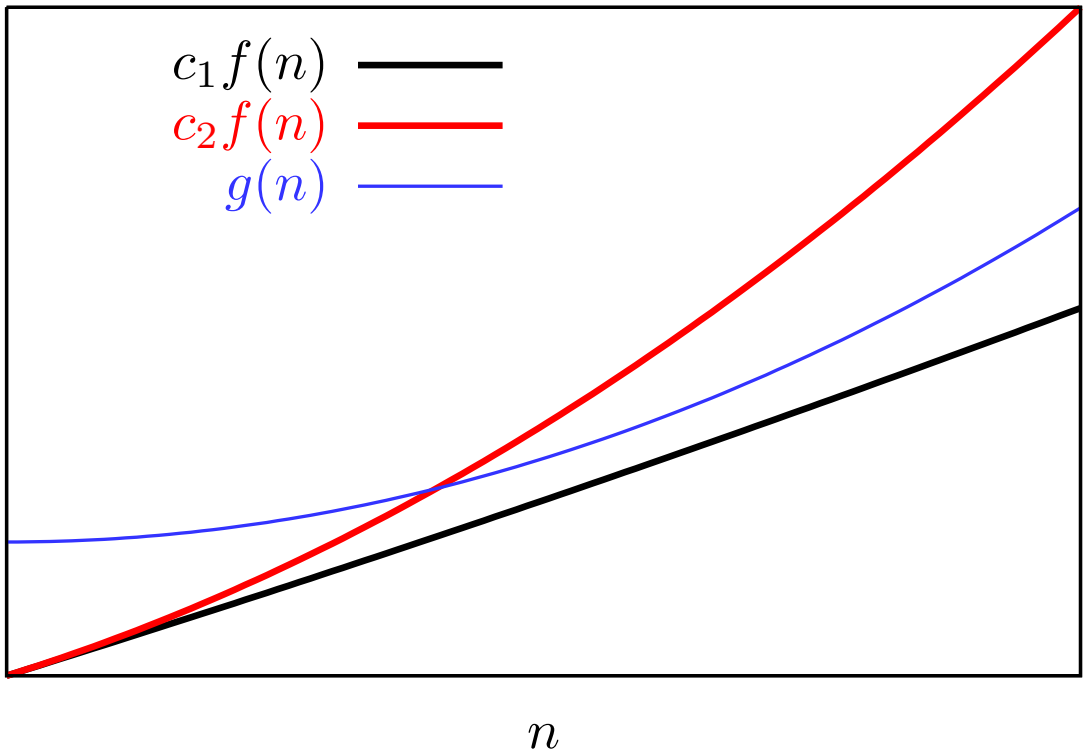
In maniera piú sintetica:

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \ : \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione $g(n) = \Theta(f(n))$ per indicare $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = \Theta(f(n))$$



Spiegazione intuitiva

- Se $g(n) = O(f(n))$ significa che l'ordine di grandezza di $g(n)$ è "minore o uguale" a quello di $f(n)$;
- Se $g(n) = \Theta(f(n))$ significa che $g(n)$ e $f(n)$ hanno lo stesso ordine di grandezza;
- Se $g(n) = \Omega(f(n))$ significa che l'ordine di grandezza di $g(n)$ è "maggiore o uguale" a quello di $f(n)$.

Alcune proprietà delle notazioni asintotica

Simmetria

$$g(n) = \Theta(f(n)) \text{ se e solo se } f(n) = \Theta(g(n))$$

Simmetria Trasposta

$$g(n) = O(f(n)) \text{ se e solo se } f(n) = \Omega(g(n))$$

Transitività

Se $g(n) = O(f(n))$ e $f(n) = O(h(n))$, allora $g(n) = O(h(n))$.
Lo stesso vale per Ω e Θ.

Ordini di grandezza

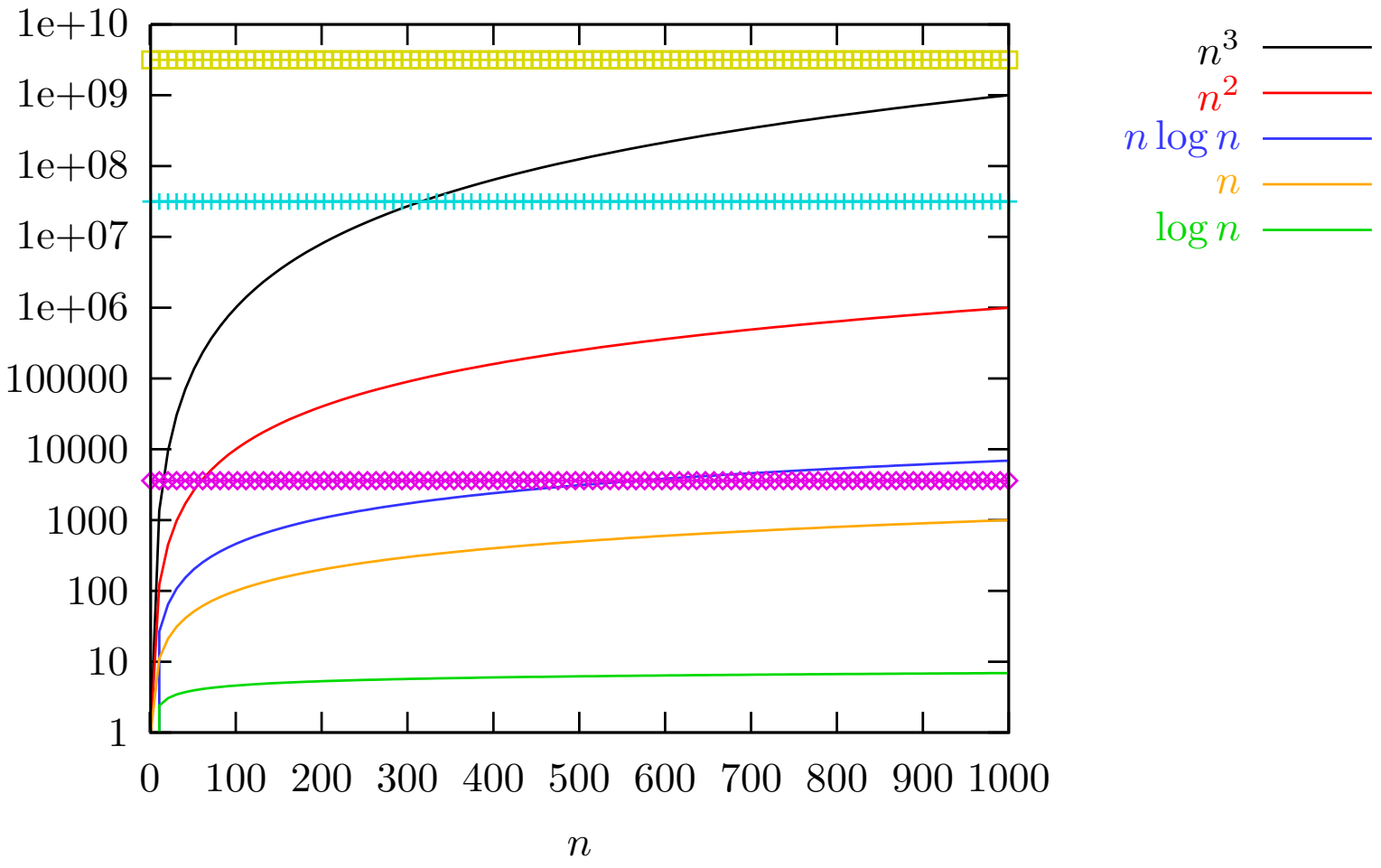
In ordine di costo crescente:

	Ordine	**Esempio**
$O(1)$	costante	Determinare se un numero è pari
$O(\log n)$	logaritmico	Ricerca di un elemento in un array ordinato
$O(n)$	lineare	Ricerca di un elemento in un array disordinato
$O(n \log n)$	pseudolineare	Ordinamento mediante Merge Sort
$O(n^2)$	quadratico	Ordinamento mediante Bubble Sort
$O(n^3)$	cubico	Prodotto di due matrixi $n \times n$ con l'algoritmo "intuitivo"
$O(c^n)$	esponenziale, base $c > 1$	
$O(n!)$	fattoriale	Calcolare il determinante di una matrice mediante espansione dei minori
$O(n^n)$	esponenziale, base n	

In generale:

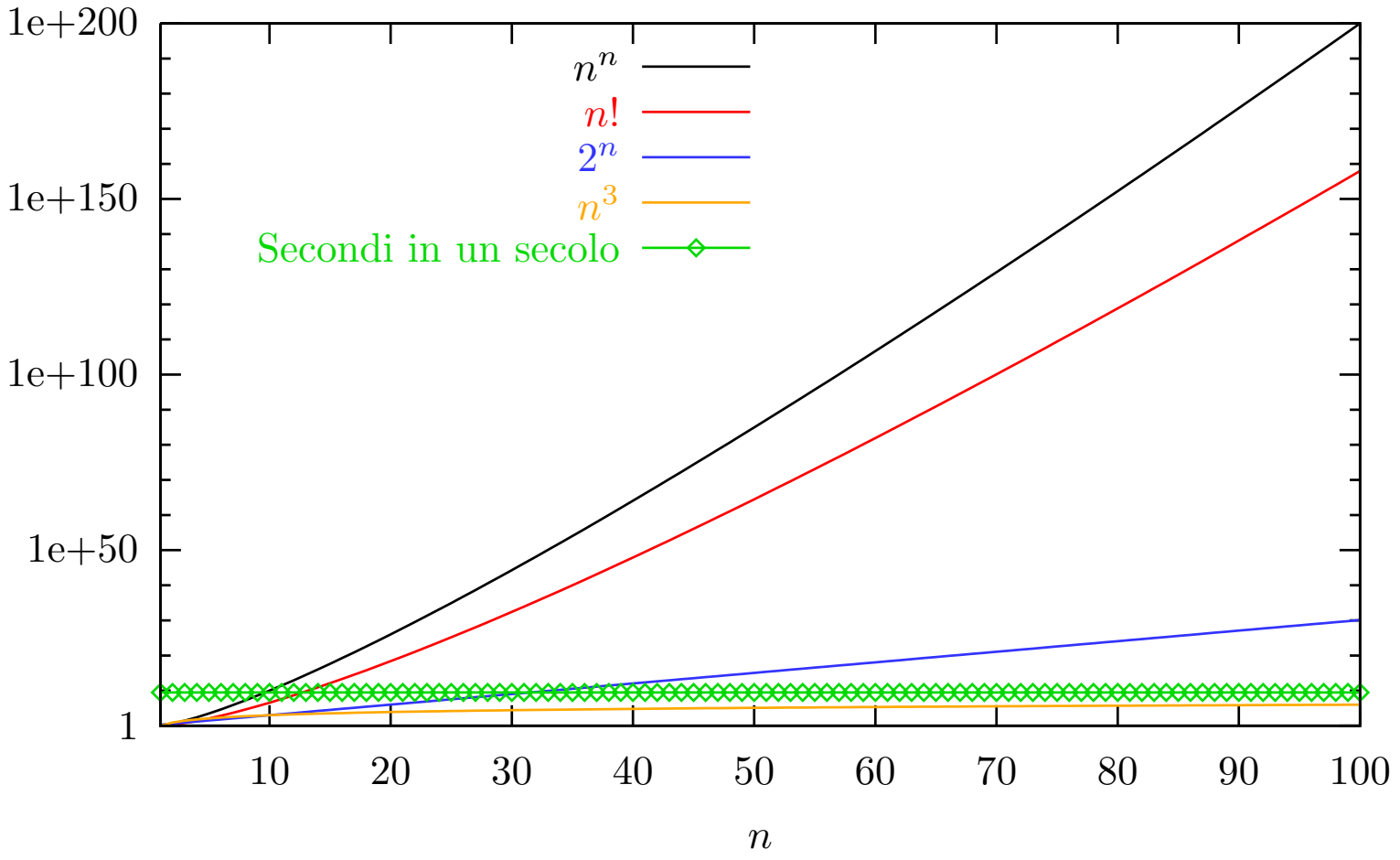
- $O(n^k)$ con $k > 0$ è ordine polinomiale
- $O(c^n)$ con $c > 1$ è ordine esponenziale

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



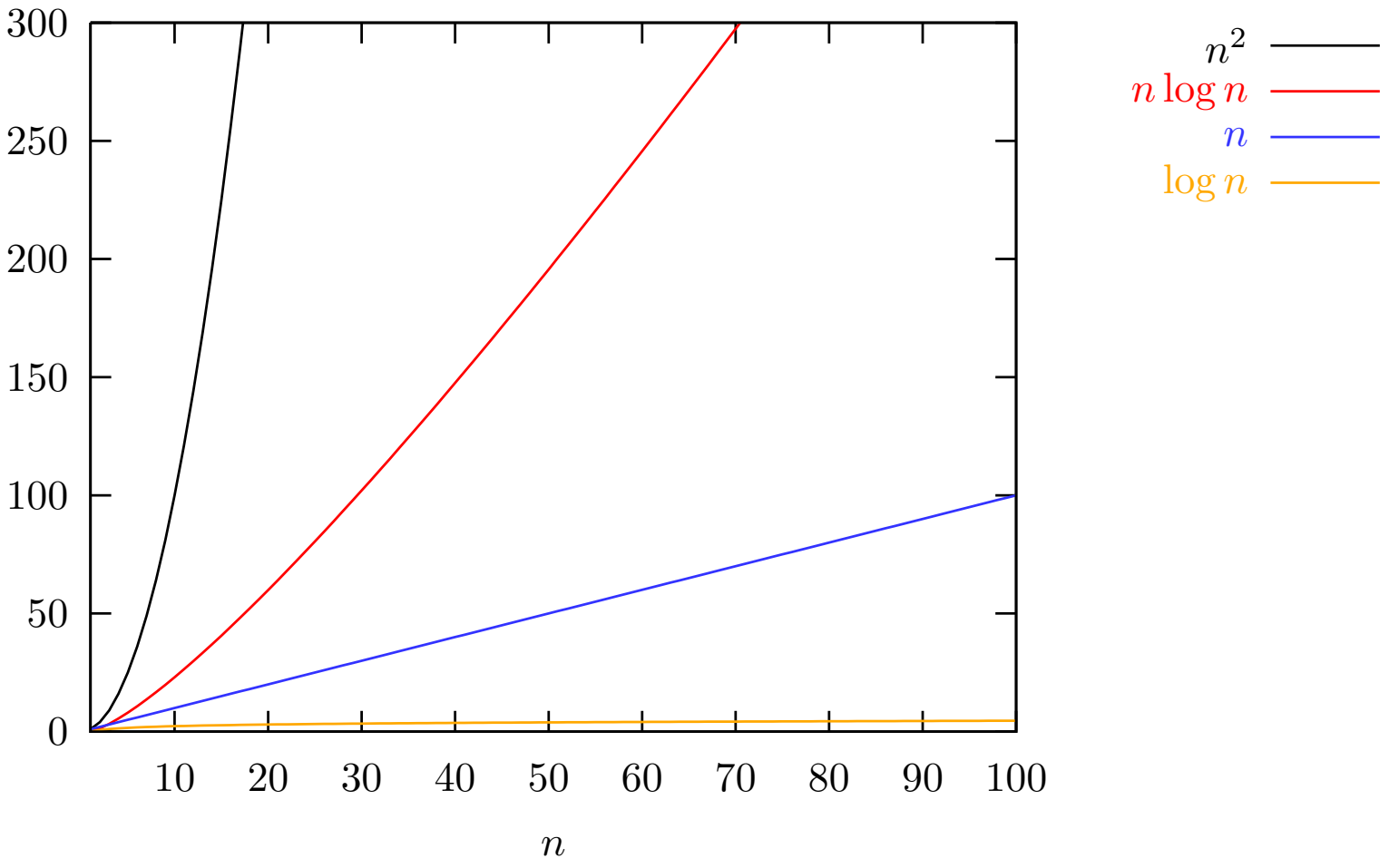
Nota: scala *y* logaritmica; le linee orizzontali segnano il numero di secondi in un'ora, in un anno e in un secolo (rispettivamente, dal basso verso l'alto)

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



Nota: scala *y* logaritmica!

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



Domande

- Dimostrare che $n \log n = O(n^2)$;
- Dove collochereste $O(\sqrt{n})$ nella tabella degli ordini di grandezza? Perché?
- Dimostrare che, per ogni $\alpha > 0$, $\log n = O(n^\alpha)$ (suggerimento: considerare $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$)

Vero o falso?

$6n^2 = \Omega(n^3)$?

Applicando la definizione, dobbiamo dimostrare se

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0 \ : \ \forall n \geq n_0 \quad 6n^2 \geq cn^3$$

Cioè $c \leq 6/n$.

Fissato c è sempre possibile scegliere un valore di n sufficientemente grande tale che $6/n < c$, per cui l'affermazione è falsa. □

Vero o falso?

$10n^3 + 2n^2 + 7 = O(n^3)$?

Applicando la definizione, dobbiamo dimostrare se

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0 \ : \ \forall n \geq n_0 \quad 10n^3 + 2n^2 + 7 \leq cn^3$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} 10n^3 + 2n^2 + 7 &\leq 10n^3 + 2n^3 + 7n^3 \qquad (\text{se } n \geq 1) \\ &= 19n^3 \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza è verificata ponendo $n_0 = 1$ e $c = 19$. □

Costo di esecuzione

Definizione

Un algoritmo $\mathcal{A}$ ha costo di esecuzione $O(f(n))$ su istanze di ingresso di dimensione n rispetto ad una certa risorsa di calcolo se la quantitá $r(n)$ di risorsa sufficiente per eseguire $\mathcal{A}$ su una qualunque istanza di dimensione n verifica la relazione $r(n) = O(f(n))$.

Nota Risorsa di calcolo per noi significa tempo di esecuzione oppure occupazione di memoria.

Complessità dei problemi

Definizione

Un problema $\mathcal{P}$ ha complessità $O(f(n))$ rispetto ad una data risorsa di calcolo se esiste un algoritmo che risolve $\mathcal{P}$ il cui costo di esecuzione rispetto a quella risorsa è $O(f(n))$.

Analisi di algoritmi non ricorsivi

Ricerca il valore minimo contenuto in un array non vuoto

```
// Precondizione: v[] non vuoto
public static int Minimo( int v[] )
{
  int m=0; // Posizione dell'elemento minimo
  for ( int i=1; i<v.length; ++i ) {
    if ( v[i]<v[m] )
      m = i;
  }
  return v[m];
}
```

Analisi

- Sia n la lunghezza del vettore v.
- Il corpo del ciclo viene eseguito $n - 1$ volte;
- Ogni iterazione ha costo $O(1)$ (vengono eseguite solo istruzioni elementari).
- Il costo di esecuzione della funzione `Minimo` rispetto al tempo è quindi $O(n)$ (o meglio, $\Theta(n)$).

Alcune regole utili

Somma

Se $g_1(n) = O(f_1(n))$ e $g_2(n) = O(f_2(n))$, allora
$g_1(n) + g_2(n) = O(f_1(n) + f_2(n))$

Prodotto

Se $g_1(n) = O(f_1(n))$ e $g_2(n) = O(f_2(n))$, allora
$g_1(n) \cdot g_2(n) = O(f_1(n) \cdot f_2(n))$

Eliminazione costanti

Se $g(n) = O(f(n))$, allora $a \cdot g(n) = O(f(n))$ per ogni costante $a > 0$

Osservazione

Utilizzando gli ordini di grandezza, ogni operazione elementare ha costo $O(1)$; un contributo diverso viene dalle istruzioni condizionali e iterative.

```
if ( F_test ) {
   F_true
} else {
   F_false
}
```

Supponendo:

- $\text{F\_test} = O(f(n))$
- $\text{F\_true} = O(g(n))$
- $\text{F\_false} = O(h(n))$

Allora il costo di esecuzione del blocco if-then-else è

$$O(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$$

Esempio
Un algoritmo iterativo di ordinamento

```
public class SortingAlgo {
  // Calcola l'indice dell'elemento di valore
  // minimo nell'insieme v[i], v[i+1]... v[j]
  static int Min( int v[], int i, int j )
  { /* ... /* }
  // v[] deve essere non vuoto
  public static void Sort( int v[] )
  {
    for ( int i=0; i<v.length-1; ++i ) {
      int m = SortingAlgo.Min( v, i, v.length-1 );
      // Scambia v[i] e v[m]
      int tmp = v[i];
      v[i] = v[m];
      v[m] = tmp;
    }
  }
}
```

Analisi dell'algoritmo di ordinamento

- La chiamata Min(v,i,v.length−1) individua l'elemento minimo nell'array $v[i], v[i+1], \ldots v[n-1]$. Il tempo richiesto è proporzionale a $n-i$, $i = 0, 1, \ldots n-1$ (perché?);
- L'operazione di scambio ha costo $O(1)$ in termini di tempo di esecuzione;
- Il corpo del ciclo **for** viene eseguito n volte.

Il costo di esecuzione rispetto al tempo dell'intera funzione `Sort` è:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = n^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

che è $\Theta(n^2)$.

Analisi di algoritmi ricorsivi

Ricerca di un elemento in un array ordinato

```
public class RicercaBinaria {

  static int TrovaRic( int val, int v[], int i, int j ) {
    if ( i>j ) { return -1; }
    else {
      int m = (i+j)/2;
      if ( v[m] == val ) { return m; } // trovato
      else {
        if ( v[m] > val ) {
          return TrovaRic( val, v, i, m-1 );
        } else {
          return TrovaRic( val, v, m+1, j );
        }
      }
    }
  }

  // Trova la posizione di un elemento di valore val nel
  // vettore v[], che deve essere ordinato in senso crescente
  public static int Trova( int val, int v[] ) {
    RicercaBinaria.TrovaRic( val, v, 0, v.length-1 );
  }
}
```

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Sia $T(n)$ il tempo di esecuzione della funzione `TrovaRic` su un vettore di $n = j - i + 1$ elementi.

In generale $T(n)$ dipende non solo dal numero di elementi su cui fare la ricerca, ma anche dalla posizione dell'elemento cercato (oppure dal fatto che l'elemento non sia presente).

- Nell'ipotesi più favorevole (caso ottimo) l'elemento cercato è proprio quello che occupa posizione centrale; in tal caso $T(n) = O(1)$.
- Nel caso meno favorevole (caso pessimo) l'elemento cercato non esiste. Quanto vale $T(n)$ in tale situazione?

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Metodo dell'iterazione

Possiamo definire $T(n)$ per ricorrenza, come segue.

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n = 0 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + c_2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Il metodo dell'iterazione consiste nello sviluppare l'equazione di ricorrenza, per intuirne la soluzione:

$$T(n) = T(n/2)+c_2 = T(n/4)+2c_2 = T(n/8)+3c_2 = \ldots = T(n/2^i)+i\times c_2$$

Supponendo che n sia una potenza di 2, ci fermiamo quando $n/2^i = 1$, ossia $i = \log n$. Alla fine abbiamo

$$T(n) = c_1 + c_2 \log n = O(\log n)$$

Verificare equazioni di ricorrenza

Metodo della sostituzione

Consiste nell'applicare il principio di induzione per verificare la soluzione di una equazione di ricorrenza.

Esempio Dimostrare che $T(n) = O(n)$ è soluzione di

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione Per induzione, verifichiamo che $T(n) \leq cn$ per n sufficientemente grande.

- Caso base: $T(1) = 1 \leq c \times 1$. Basta scegliere $c \geq 1$.
- Induzione:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq c\lfloor n/2 \rfloor + n \qquad \text{(ipotesi induttiva)} \\ &\leq cn/2 + n = f(c)n \end{aligned}$$

con $f(c) = (c/2 + 1)$. La dimostrazione del passo induttivo funziona quando $f(c) \leq c$, ossia $c \geq 2$.

Teorema fondamentale della ricorrenza
Master Theorem

Teorema

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ *se* $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$;
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ *se* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ *se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$ *e* $af(n/b) \leq cf(n)$ *per* $c < 1$ *e* n *sufficientemente grande.*

Esempio
Applicazione del teorema fondamentale

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

1. Nel caso della ricerca binaria, abbiamo $T(n) = T(n/2) + O(1)$. Da cui $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = O(1)$; siamo nel secondo caso del teorema, da cui $T(n) = \Theta(\log n)$.
2. Consideriamo $T(n) = 9T(n/3) + n$; in questo caso $a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = O(n)$. Siamo nel primo caso, $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ con $\epsilon = 1$, da cui $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$.

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci

Ricordiamo la definizione della sequenza di Fibonacci:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1,\ 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Consideriamo nuovamente il tempo di esecuzione dell'algoritmo ricorsivo banale per calcolare F_n, il cui tempo di esecuzione $T(n)$ soddisfa la relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n = 1,\ 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + c_2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Vogliamo produrre un limite inferiore e superiore a $T(n)$

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci–limite superiore

Limite superiore. Sfruttiamo il fatto che $T(n)$ è una funzione non decrescente:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c_2 \\ &\leq 2T(n-1) + c_2 \\ &\leq 4T(n-2) + 2c_2 + c_2 \\ &\leq 8T(n-3) + 2^2 c_2 + 2c_2 + c_2 \\ &\leq \dots \\ &\leq 2^k T(n-k) + c_2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \\ &\leq \dots \\ &\leq 2^{n-1} c_3 \end{aligned}$$

per una opportuna costante c_3. Quindi $T(n) = O(2^n)$.

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci–limite inferiore

Limite inferiore. Sfruttiamo ancora il fatto che $T(n)$ è una funzione non decrescente:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c_2 \\
&\geq 2T(n-2) + c_2 \\
&\geq 4T(n-4) + 2c_2 + c_2 \\
&\geq 8T(n-6) + 2^2 c_2 + 2c_2 + c_2 \\
&\geq \dots \\
&\geq 2^k T(n-2k) + c_2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \\
&\geq \dots \\
&\geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} c_4
\end{aligned}$$

per una opportuna costante c_4. Quindi $T(n) = \Omega(2^{\lfloor n/2 \rfloor})$.

Nota

Attenzione $2^{\lfloor n/2 \rfloor} = O(2^n)$, ma $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \neq \Theta(2^n)$. In altre parole, le due funzioni, pur essendo entrambi esponenziali, appartengono a classi di complessità differenti (Perché?).

Analisi nel caso ottimo, pessimo e medio

Sia $\mathcal{I}_n$ l'insieme di tutte le possibili *istanze di input* di lunghezza n. Sia $T(I)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo sull'istanza $I \in \mathcal{I}_n$.

- Il costo nel caso pessimo (*worst case*) è definito come

$$T_{\text{worst}}(n) = \max_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$$

- Il costo nel caso ottimo (*best case*) è definito come

$$T_{\text{best}}(n) = \min_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$$

- Il costo nel caso medio (*average case*) è definita come

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)P(I)$$

dove $P(I)$ è la probabilità che l'istanza I si presenti.

Ricerca sequenziale

```
public class RicSequenziale {
  // Restituisce l'indice della prima occorrenza del valore val
  // nell'array v[]. Ritorna -1 se il valore non e' presente
  public static int Trova( int val, int v[] ) {
    for ( int i=0; i<v.length; ++i ) {
      if ( v[i]==val )
        return i;
    }
    return -1;
  }
}
```

- Nel caso ottimo l'elemento è all'inizio della lista, e viene trovato alla prima iterazione. Quindi $T_{\text{best}}(n) = O(1)$
- Nel caso pessimo l'elemento non è presente nella lista (oppure è presente nell'ultima posizione), quindi si itera su tutti gli elementi. Quindi $T_{\text{worst}}(n) = \Theta(n)$
- ...E nel caso medio?

Ricerca sequenziale
Analisi del caso medio

Non avendo informazioni sulla probabilità con cui si presentano i valori nella lista, dobbiamo fare delle ipotesi semplificative.

Assumiamo che, dato un vettore di n elementi, la probabilità P_i che l'elemento cercato si trovi in posizione i ($i = 1, 2, \ldots n$) sia $P_i = 1/n$, per ogni i (assumiamo che l'elemento sia sempre presente).

Il tempo $T(i)$ necessario per individuare l'elemento nella posizione i-esima è $T(i) = i$.

Quindi possiamo concludere che:

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{i=1}^{n} P_i T(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n)$$

Costo ammortizzato

L'analisi ammortizzata studia il costo medio di una sequenza di operazioni.

Definizione

Sia $T(n,k)$ il tempo totale richiesto da un algoritmo, nel caso pessimo, per effettuare k operazioni su istanze di lunghezza n. Definiamo il costo ammortizzato su una sequenza di k operazioni come

$$T_\alpha(n) = \frac{T(n,k)}{k}$$

Esempio
Analisi ammortizzata

Problema: è data una sequenza di cifre binarie, inizialmente tutte zero. Vogliamo scrivere una funzione che incrementa di uno il valore (decimale) rappresentato dalla sequenza binaria.

```
// v[0] e' il bit piu' significativo
public static void incrementa( int[] v )
{
  for ( int i=v.length-1; i>0; --i ) {
    v[i] = 1-v[i]; // inverte il bit
    if ( v[i] == 1 ) {
      break;
    }
  }
}
```

Esempio

valore	$v[0]$	$v[1]$	$v[2]$	$v[3]$	$v[4]$	$v[5]$	**Costo**
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	**1**	1
2	0	0	0	0	**1**	**0**	2
3	0	0	0	0	1	**1**	1
4	0	0	0	**1**	**0**	**0**	3
5	0	0	0	1	0	**1**	1
6	0	0	0	1	**1**	**0**	2
7	0	0	0	1	1	**1**	1
8	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**	4
9	0	0	1	0	0	**1**	1
10	0	0	1	0	**1**	**0**	2

Analisi

Il costo dell'operazione `inverti` è uguale al numero di bit invertiti.

- Il primo bit (`v[n-1]`) viene invertito ad ogni chiamata;
- Il secondo bit (`v[n-2]`) viene invertito ogni 2 chiamate;
- Il terzo bit (`v[n-3]`) viene invertito ogni 4 chiamate;
- ...
- L'i-esimo bit (`v[n-i]`) viene invertito ogni 2^{i-1} chiamate;

Il tempo totale di k operazioni è dato da:

$$T(n,k) = k + \lfloor k/2 \rfloor + \lfloor k/4 \rfloor + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=0}^{\log_2 k} \lfloor k/2^i \rfloor \leq k \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = 2k$$

Da cui

$$T_\alpha(n) = \frac{T(n,k)}{k} = O(1)$$