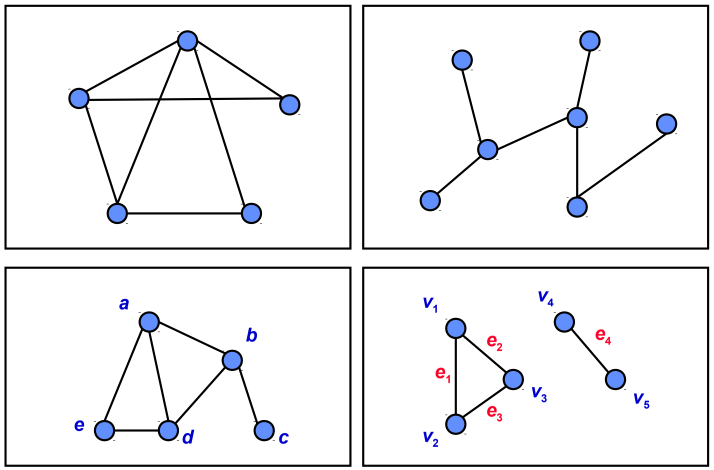
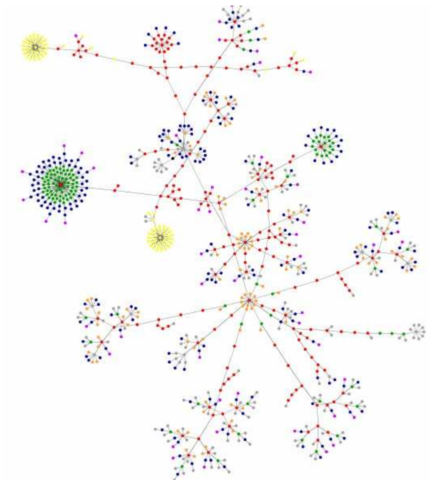
Grafi

Moreno Marzolla
http://www.moreno.marzolla.name/

Esempi di grafi



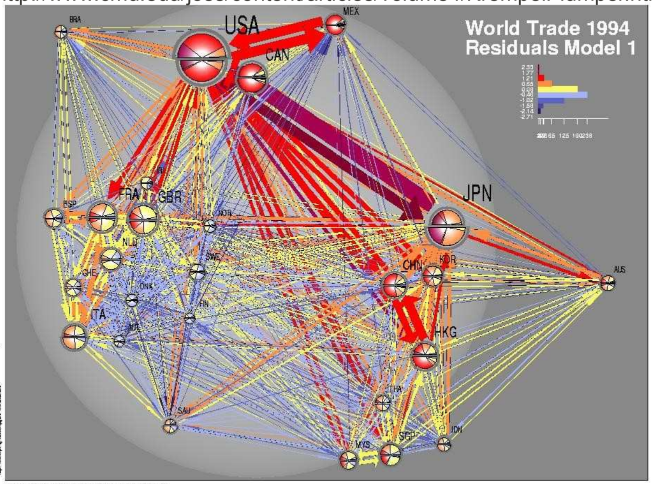
Esempi di grafi
Link tra le pagine web di amazon.com



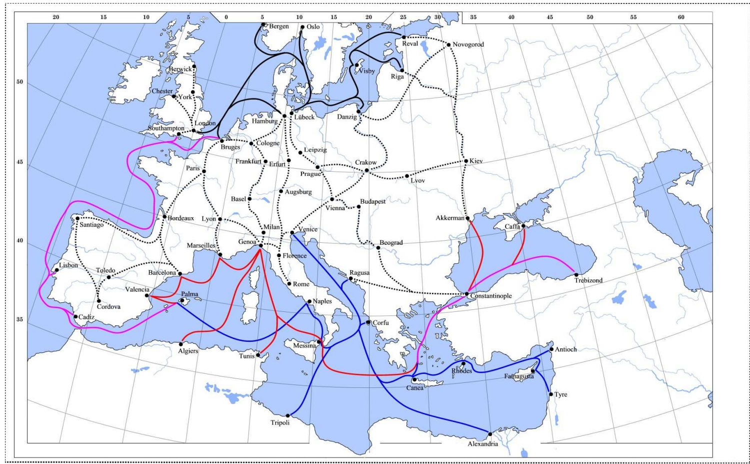
(Fonte: http://www.allthingsdistributed.com/2006/07/graphs_as_art.html)

Esempi di grafi
Import/Export

http://www.cmu.edu/joss/content/articles/volume4/KrempelPlumper.html



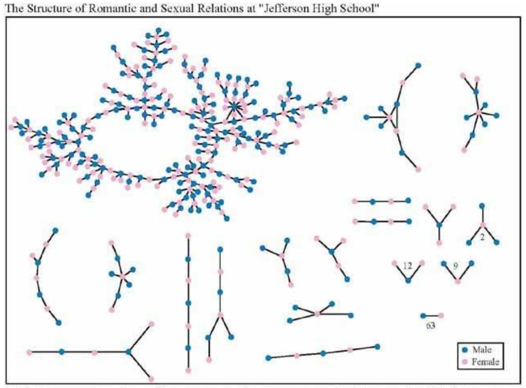
Esempi di grafi
Rotte commerciali medievali



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Late_Medieval_Trade_Routes.jpg

Esempi di grafi
Relazioni romantiche

The Structure of Romantic and Sexual Relations at "Jefferson High School"



Each circle represents a student and lines connecting students represent romantic relations occuring within the 6 months preceding the interview. Numbers under the figure count the number of times that pattern was observed (i.e. we found 63 pairs unconnected to anyone else).

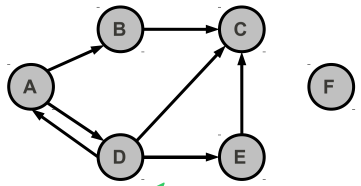
From the American Journal of Sociology, Vol. 100, No. 1. *"Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks,"* Bearman PS, Moody J, Stovel K.
http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/386272

Problemi sui grafi

- Visite
  - Visite in ampiezza (cammini minimi singola sorgente)
  - Visite in profondità (ordinamento topologico, componenti fortemente connesse)
- Cammini minimi
  - Da singola sorgente
  - Fra tutte le coppie di vertici
- Alberi di connessione minimi
- Problemi di flusso
- ....

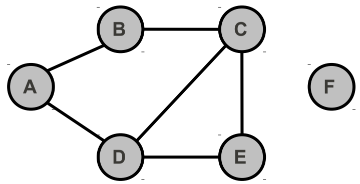
Grafi orientati e non orientati: definizione

- Un grafo orientato G è una coppia (V, E) dove:
  - Insieme finito dei *vertici V*
  - *Insieme degli archi E:* relazione binaria tra vertici



V = {A, B, C, D, E, F}
E = { (A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C), (D,E), (D,A) }

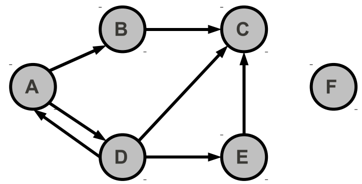
- Un grafo non orientato G è una coppia (V, E) dove:
  - Insieme finito dei *vertici V*
  - *Insieme degli archi E:* coppie non ordinate



V = {A, B, C, D, E, F}
E = { {A,B}, {A,D}, {B,C}, {C,D}, {C,E}, {D,E} }

Definizioni: incidenza e adiacenza

- In un grafo orientato l'arco *(v,w)* è *incidente* da *v* in *w*
- Un vertice *w* è *adiacente* a *v* se e solo se **(v, w)** ∈ **E**
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica



(A, B) è incidente da A a B
(A, D) è incidente da A a D
(D, A) è incidente da D a A

B è adiacente ad A
C è adiacente a B, D, E
A è adiacente a D e viceversa
B non è adiacente a D, C
F non è adiacente ad alcun vertice

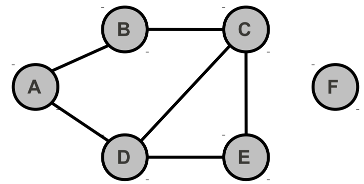
Rappresentazione di grafi

- Operazioni che la struttura dati deve supportare
  - numVertici()→intero
  - numArchi()→intero
  - grado(vertice v)→intero
  - archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco)
  - estremi(arco e)→(vertice, vertice)
  - opposto(vertice x, arco e)→vertice
  - sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano
  - aggiungiVertice(vertice v)
  - aggiungiArco(vertice x, vertice y)
  - rimuoviVertice(vertice v)
  - rimuoviArco(arco e)

Matrice di adiacenza (grafo non orientato)

$$M(u,v)=\begin{cases}1 & se\ \{u,v\}\in E\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

Spazio: Θ(|V|²)



$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}A & B & C & D & E & F\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

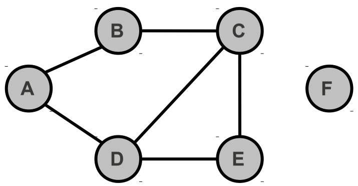
Proprietà della matrice di adiacenza

M

0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

M^2

2	0	2	0	1	0
0	2	0	2	1	0
2	0	3	1	1	0
0	2	1	3	1	0
1	1	1	1	2	0
0	0	0	0	0	0



M^3

0	4	1	5	2	0
4	0	5	1	2	0
1	5	2	6	4	0
5	1	6	2	4	0
2	2	4	4	2	0
0	0	0	0	0	0

Costi
Matrice di adiacenza

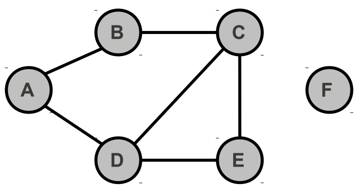
- grado(vertice v)→intero O(n)
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) O(n)
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano O(1)
- aggiungiVertice(vertice v) $O(n^2)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) O(1)
- rimuoviVertice(vertice v) $O(n^2)$
- rimuoviArco(arco e) O(1)

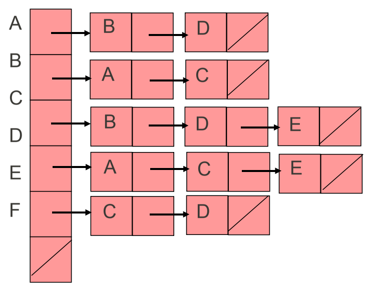
Indichiamo con n=|V|, m=|E|

Liste di adiacenza
(grafo non orientato)

Spazio: Θ(|V|+|E|)

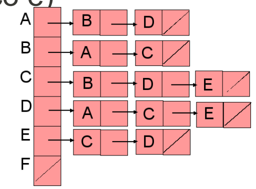
v.adj = { w | {v,w} ∈ E }





Costi
Liste di adiacenza

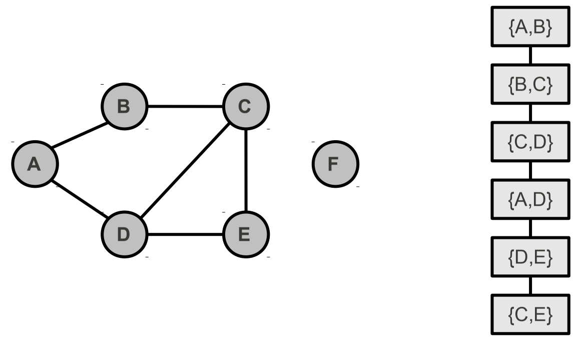
- grado(vertice v)→intero O(δ(v))
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) O(δ(v))
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano O(min{δ(x), δ(y)})
- aggiungiVertice(vertice v) O(1)
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) O(1)
- rimuoviVertice(vertice v) O(m)
- rimuoviArco(arco e) O(δ(x)+δ(y))



Indichiamo con n=|V|, m=|E|, δ(x) = grado del nodo x (spiegato in seguito)

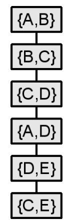
Liste di archi
(grafo non orientato)

Spazio: Θ(|E|)

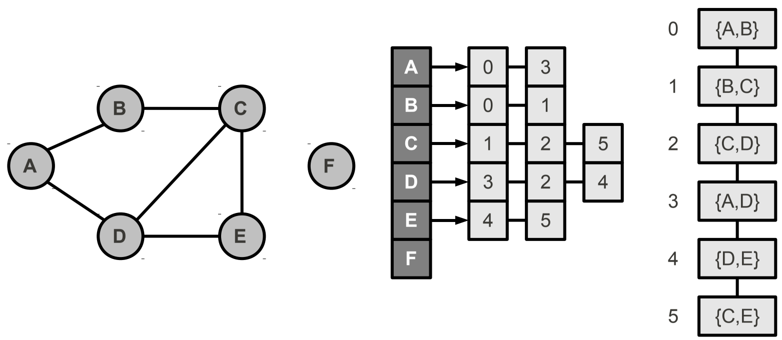


Costi
Liste di archi

- grado(vertice v)→intero $O(m)$
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) $O(m)$
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano $O(m)$
- aggiungiVertice(vertice v) $O(1)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) $O(1)$
- rimuoviVertice(vertice v) $O(m)$
- rimuoviArco(arco e) $O(1)$
- Nota: molte operazioni sono inefficienti perché richiedono la scansione dell'intera lista di archi

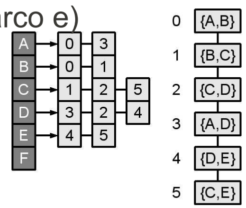


Liste di incidenza
(grafo non orientato)



Costi
Liste di incidenza

- grado(vertice v)→intero $O(\delta(v))$
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) $O(\delta(v))$
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano $O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
- aggiungiVertice(vertice v) $O(1)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) $O(1)$
- rimuoviVertice(vertice v) $O(m)$
- rimuoviArco(arco e) $O(\delta(x)+\delta(y))$

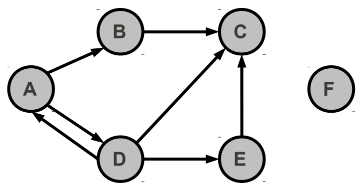


Indichiamo con $n=|V|$, $m=|E|$, $\delta(x)$ = grado del nodo x (spiegato in seguito)

Matrice di adiacenza (grafo orientato)

$$M(u,v)=\begin{cases}1 & se\ \ (u,v)\in E\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

Spazio: $\Theta(|V|^2)$

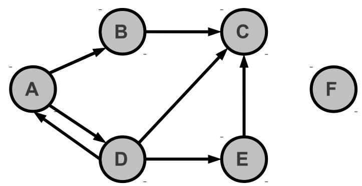


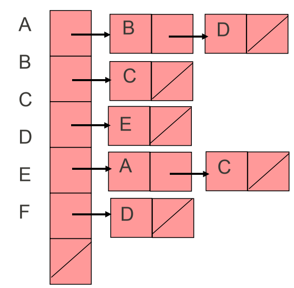
$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}A & B & C & D & E & F\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccc}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

Liste di adiacenza (grafo orientato)

Spazio: $\Theta(|V|+|E|)$

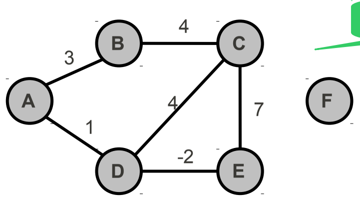
v.adj = { w | (v,w) $\in$ E }





Grafi pesati

- In alcuni casi ogni arco ha un peso (o costo) associato
- Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo *c*: *E* $\rightarrow$ *R*, dove *R* è l'insieme dei numeri reali
- Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è infinito

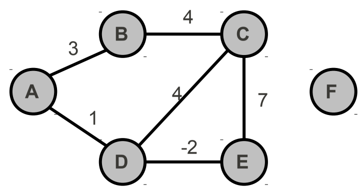


c((C,F)) = ∞

Matrice di adiacenza in grafi non orientati pesati

$$M(u,v)=\begin{cases}c(u,v) & se\ \ \{u,v\}\in E\\ \infty & altrimenti\end{cases}$$

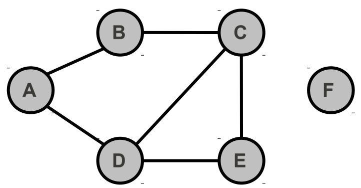
Spazio: $\Theta(|V|^2)$



$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}A & B & C & D & E & F\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccc}\infty&3&\infty&1&\infty&\infty\\3&\infty&4&\infty&\infty&\infty\\\infty&4&\infty&4&7&\infty\\1&\infty&4&\infty&-2&\infty\\\infty&\infty&7&-2&\infty&\infty\\\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\end{array}\right)\end{array}$$

Definizioni: grado

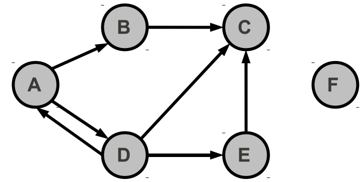
- In un *grafo non orientato*, il *grado* di un vertice è il numero di archi che partono da esso



A, *B* ed *E* hanno *grado* 2
C e *D* hanno *grado* 3
F ha *grado* 0

Definizioni: grado

- In un *grafo orientato*, il *grado entrante* (uscente) di un vertice è il numero di archi incidenti in (da) esso
- In un *grafo orientato* il *grado* di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente

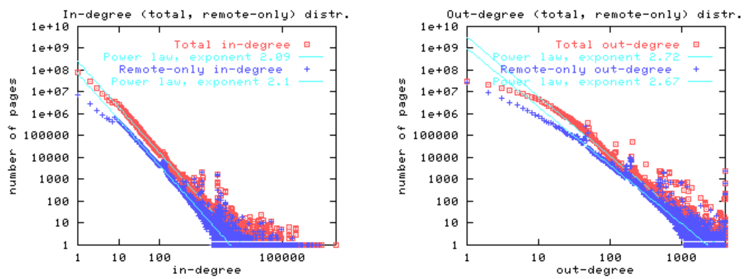


A ha *g. u.* 2 e *g. e.* 1
B ha *g. u.* *1* e *g. e.* *1*
C ha *g. u.* *0* e *g. e.* *3*
D ha *g. u.* *3* e *g. e.* *1*

A e *C* hanno *grado* 3
B ha *grado* 2
D ha *grado* 4

...Nel mondo reale

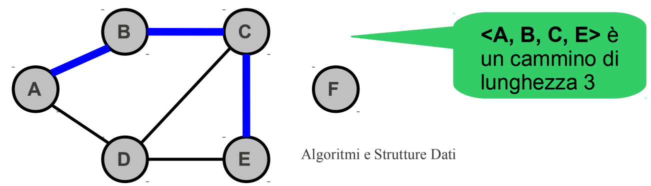
- Il Web può essere visto come un grafo orientato in cui i nodi rappresentano le singole pagine, ed esiste un arco (u,v) sse la pagina u contiene un hyperlink che punta verso la pagina v



A. Broder et al., *"Graph Structure of the Web"*, http://www9.org/w9cdrom/160/160.html

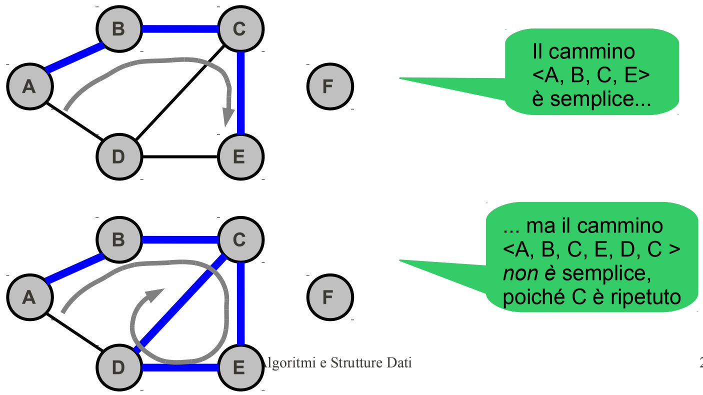
Cammini

- Un *cammino* in *G*=(*V*,*E*) è una sequenza di vertici $<w_0, w_1, \ldots, w_k>$ tale che $\{w_i, w_{i+1}\} \in E$ per $0 \le i \le k-1$
- Il cammino $<w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k>$ contiene i nodi $w_0, w_1, \ldots, w_k$ e gli archi $\{w_0,w_1\}$ $\{w_1,w_2\}$ …$\{w_{k-1},w_k\}$
- La lunghezza del cammino è il numero di archi attraversati



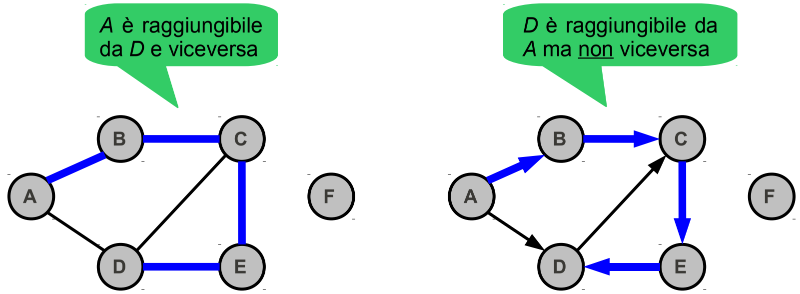
Cammini

- Un cammino si dice semplice se tutti i suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza)



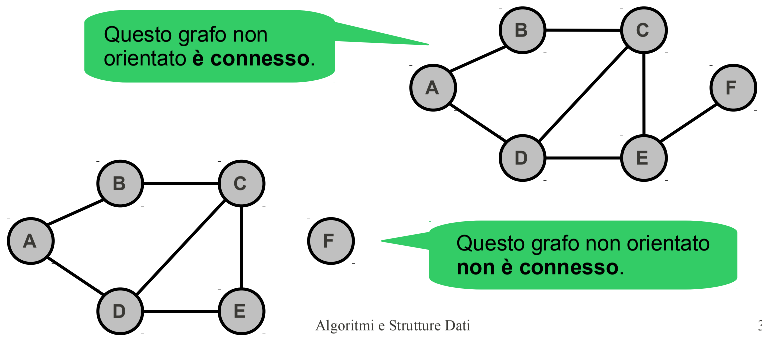
Cammini

- Se esiste un cammino *c* tra i vertici *v* e *w*, si dice che *w* è raggiungibile da *v* tramite *c*



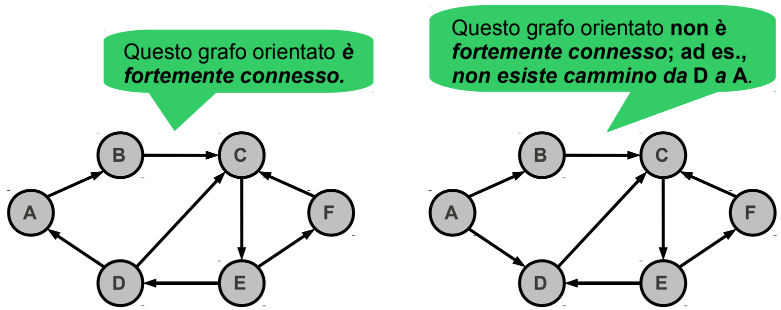
Grafi connessi

- Se *G* è un grafo non orientato, diciamo che *G* è connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.



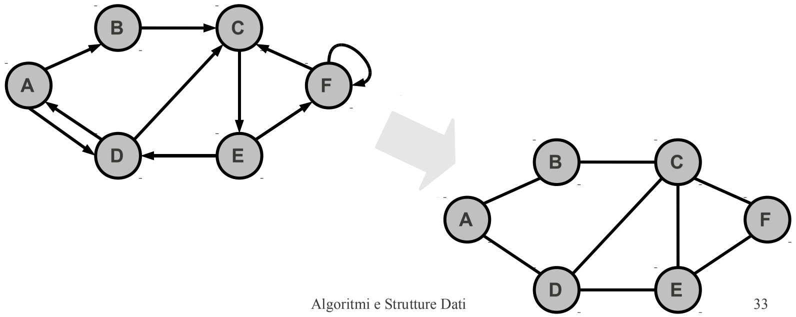
Grafi fortemente connessi

- Se G è un grafo orientato, diciamo che G è fortemente connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.



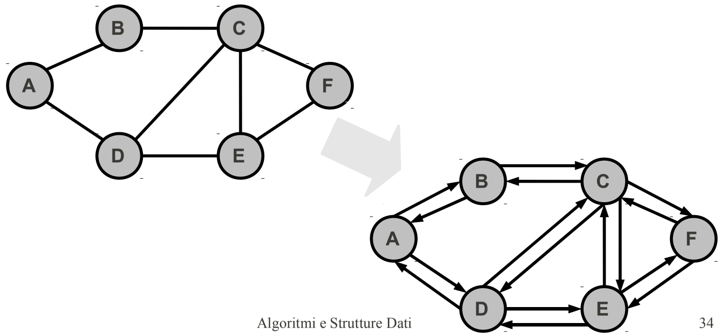
Versione non orientata

- Se G è un grafo orientato, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e i cappi è detto grafo non orientato sottostante o anche versione non orientata di G.



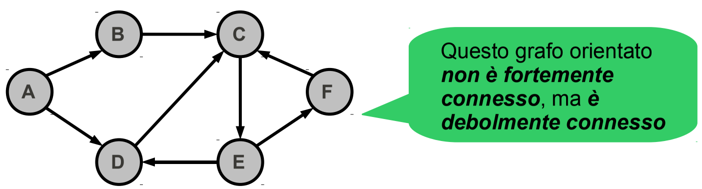
Versione orientata

- Se G è un grafo non orientato, il grafo ottenuto inserendo due archi orientati opposti per ogni arco non orientato del grafo è detto la versione orientata di G.

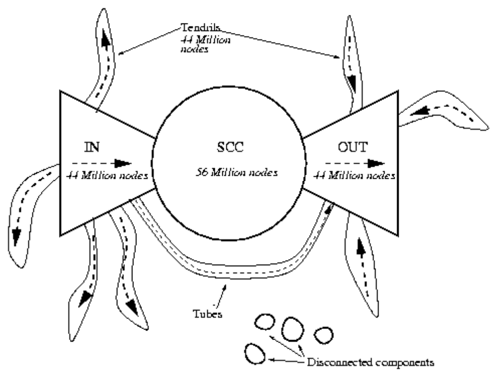


Grafi debolmente connessi

- Se G è un grafo orientato che non è fortemente connesso, ma la sua versione non orientata è connessa, diciamo che G è debolmente connesso



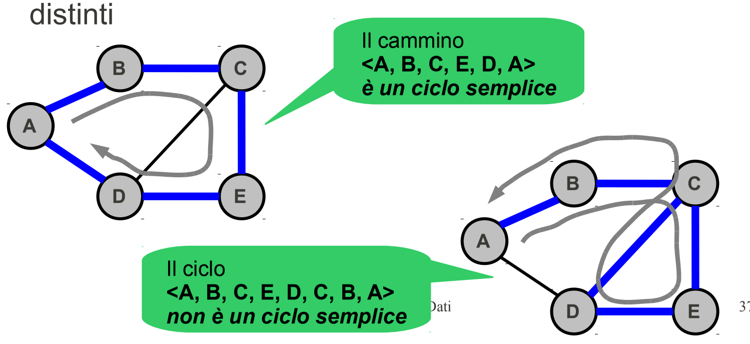
...Nel mondo reale



A. Broder et al., *"Graph Structure of the Web"*, http://www9.org/w9cdrom/160/160.html

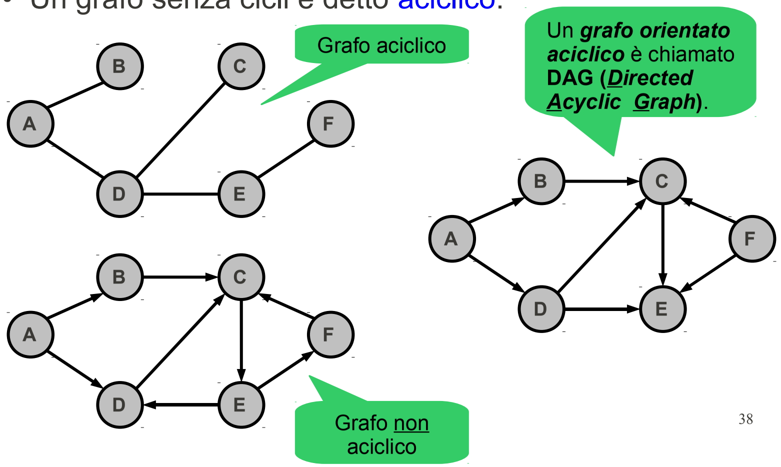
Cicli

- Un *ciclo* in un grafo orientato è un cammino $<w_0, w_1, \ldots, w_n>$ di lunghezza almeno 3, tale che $w_0 = w_n$
- Un ciclo è semplice se i nodi $w_1, \ldots, w_{n-1}$ sono tutti distinti



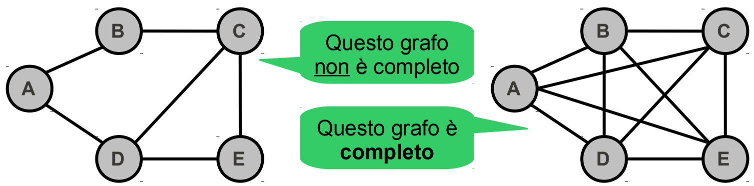
Grafi aciclici

- Un grafo senza cicli è detto aciclico.



Grafo completo

- Un *grafo non orientato completo* è un grafo non orientato che ha un arco tra ogni coppia di vertici.



- Quanti archi ci sono in un grafo non orientato completo? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$

Alberi

- Un albero libero è un grafo non orientato connesso, aciclico.
- Se un vertice è detto radice, otteniamo un albero radicato.