Alcune formule utili

Versione 1.1, 28 gennaio 2010

Moreno Marzolla

Durante le prove scritte (inclusi i parziali) del corso di Algoritmi e Strutture Dati per Informatica per il Management **non è consentito consultare libri o appunti**. Verrà però allegato il presente documento assieme al testo con gli esercizi da svolgere. Qui sono raccolte alcune definizioni che possono risultare utili. Tutto ciò che è scritto in questo documento, pertanto, **non necessita di essere imparato a memoria**. In generale le prove scritte del corso saranno tali da richiedere il minimo sforzo mnemonico da parte degli studenti, privilegiando invece la verifica della corretta comprensione delle tecniche viste a lezione applicate alla soluzione di problemi nuovi.

1 Notazioni asintotiche

Data una funzione costo $f(n)$ definiamo:

- $O(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$
- $\Omega(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \geq cf(n)\}$
- $\Theta(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$

2 Master Theorem

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ per $\epsilon > 0$;
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ per $\epsilon > 0$ e $af(n/b) \leq cf(n)$ per $c < 1$ e n sufficientemente grande.

3 Proprietà dei logaritmi

Cambiamento di base Per ogni $x > 0$, $b, c > 1$ si ha:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Logaritmo del prodotto Per ogni $x, y > 0$ e $b > 1$ si ha

$$\log_b(x \cdot y) = (\log_b x) + (\log_b y)$$

Logaritmo di una potenza Per ogni $a, x > 0$ e $b > 1$ risulta

$$\log_b(x^a) = a \log_b x$$

da cui risulta anche che per ogni $x, y > 0$ e $b > 1$

$$x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$$

4 Serie e successioni

Serie aritmetica La somma dei primi n numeri interi consecutivi vale:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Serie geometrica La serie geometrica di ragione $q \neq 1$ vale:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

5 Calcolo combinatorio

Approssimazione del fattoriale Valgono i seguenti limiti per $n!$:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n - 1}\right)$$

da cui si può dire che, per n sufficientemente grande,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Coefficienti binomiali Si ha:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vale anche la seguente proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$